

비틀림 자이로휠을 이용한 인버티드 펜듈럼의 제어

Control of Inverted Pendulum using Twisted Gyro-Wheel

황정문¹, 표범식¹, 김정한^{1,✉}

Jung Moon Hwang¹, Beom Sik Pyo¹ and Jung Han Kim^{1,✉}

¹ 서울과학기술대학교 기계설계자동화공학부 (Mechanical Design & Automation Eng., Seoul National University of Science and Technology)

✉ Corresponding author: hankim@seoultech.ac.kr, Tel: 02-970-6397

Manuscript received: 2011.3.29 / Accepted: 2011.7.4

A control system for stabilizing a small robot or inverted pendulum using twisted gyro wheel is proposed. Conventional stabilizer using inertial wheel employs action-reaction force/torque to control a pendulum, which can generate relatively small torque and short period of output. In this paper, a novel actuation method using twisted gyro torque in 3-dimentional space was proposed to stabilizing a pendulum by twisting the assembly including a rotating gyro wheel. In addition, two special control functions for this type of twisted gyro wheel were designed. One is the function of self-adjusting the mass center of the robot and the other is the torque reloading configuration for continuous torque generation. The proposed system was verified by experimental result and simulation. The designed twisted gyro wheel control system can be easily packed in a small size module and installed in a humanoid robot or inverted pendulum type mechanism.

Key Words: Gyro-wheel (자이로 휠), Reaction-wheel (리액션 휠), 3 Axes Attitude Control (3 축 자세제어)

기호설명

M : moment

H : angular momentum

I : moment of inertia

m_1 : mass of gyro-wheel

m_2 : mass of system

g : gravity of acceleration

r : radius of gyro-wheel

Ω : angular velocity of xyz frame

ω : angular velocity in xyz coordinates

1. 서론

도립진자(Inverted-pendulum)에 대한 연구는 다양한 형태의 로봇 및 운송수단의 이동 시 불안정

특성을 해결하기 위하여 활용될 수 있다. 최근 들어 활발하게 연구되고 있는 이족보행로봇도 기본적으로 도립진자 형태로 모델링될 수 있으며, 세그웨이, 무라타제작소의 자전거로봇 및 혼다의 U3-X 를 비롯한 많은 종류의 이동형 로봇들이 도립진자의 형태를 가지며, 스스로 자세를 제어하면서 동작한다.

자세제어 기술은 로봇뿐만 아니라, 인공위성 및 잠수함 등 다양한 분야에서의 활용이 가능한데, 특히 인공위성의 반작용 조절용 바퀴(reaction-wheel)를 이용한 자세제어는 기존의 가스분출(gas-jet)방식보다 인공위성의 수명을 획기적으로 향상시켰다.¹

이렇듯 다양한 응용분야를 가지고 있는 도립진자 시스템은 일반적으로 카트(cart) 위에 막대기를 부착한 타입의 도립진자 시스템^{2,3}이 가장 많

이 연구되었으며, 세그웨이와 같이 2 개의 바퀴가 달린 형태, 회전하는 판의 가장자리에 도립진자가 부착된 타입,^{4,5} 최근에는 무라타제작소의 자전거 로봇의 롤링제어와 같이 관성휠을 이용한 방법⁶⁻¹¹ 등 다양하며, 제어 알고리즘으로도 적응제어,² 퍼지제어, 가변구조제어,⁴ 수동의존제어^{6,11} 등 다양한 방식의 제어기법이 연구되었다.

도립진자 제어 시스템의 실제적인 응용분야를 확장하려면 가장 먼저 고려되어야 하는 사항이 넘어지려는 도립진자를 제어하는 모멘텀을 발생시키는 출력방식인데, 카트형 같은 경우 카트를 앞뒤로 움직이며,³ 세그웨이와 같은 두 바퀴 방식은 바퀴를 회전함으로써 자세를 제어한다. 하지만 많은 경우 이족보행 로봇처럼 움직임을 최소화 하면서 자세를 제어해야 하는 경우에는 많은 제약이 따른다.

무라타제작소의 자전거 로봇의 경우 가슴에 달린 관성바퀴가 넘어지려는 반대 방향으로 회전함으로써 자전거로봇의 롤링을 제어하는데, 이러한 형태의 관성바퀴는 그 발생토크가 매우 작으므로 조그만 외란에도 쉽게 넘어지며, 또 관성바퀴 자체의 가속에 의해서 모멘텀을 발생시키므로 가속된 후의 속도를 다시 감속하여 휠의 속도를 원상 복구시켜야 하는 어려움이 있다.

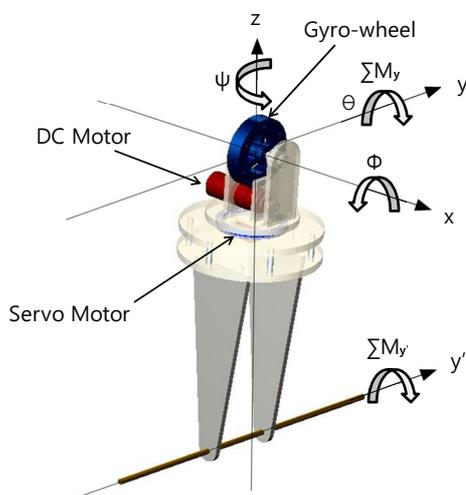


Fig. 1 Proposed stabilizing system

본 연구에서는 휴머노이드 로봇이나 시스템 안에 완전히 내장(embedded)될 수 있는 형태의 출력장치를 목표로 개발하였으며, 제안된 장치의 기본 원리는, Fig. 1 과 같이 롤링방향(ϕ)으로 등속회전

하고 있는 자이로 휠의 회전축의 방향을 요(yaw, ψ) 방향으로 비틀어 피치(pitch, θ) 방향의 모멘텀을 발생시켜 제어함으로써 기존의 방식보다 매우 큰 토크를 발생시키는 원리를 사용하여 도립진자를 제어하는 방식을 제안하고, 이러한 제어 방식에 적합한, 자동으로 무게중심을 찾아주는 원점제어기능(zero-searcher) 및 토크의 연속적인 발생을 위한 토크 리로더(torque-reloader) 제어 알고리즘을 제안하고자 한다.

2. 기구역학적 설계

제안된 전체 시스템은 크게 구동부, 링크부, 지지부로 나누어진다. 구동부는 힘을 발생시키는 자이로휠(gyro-wheel), 지지대 및 z 축 회전부(ψ)로 이루어지고, 링크부는 구동부와 지지부를 연결해주는 다리와 기타 연결 부품으로 구성된다. 그리고 지지부는 구동부와 링크부를 받쳐주는 힌지 이하 부분이다.

전체 시스템을 보면, Fig. 1 과 같이 우선 도립진자 전체몸체의 회전축 힌지는 y' 축에 있으며 궁극적으로 전체 몸체의 기립제어를 목표로 한다. 2 축으로 구성된 구동부는 Fig. 2 와 같이 일정한 속도로 회전(rolling)하는 자이로 휠이 x 축을 회전축으로 장착되어 있으며, 자이로휠(gyro-wheel)을 지지하는 구동부의 어셈블리는 그 전체가 z 축을 중심으로 회전(yawing)할 수 있도록 설계하였다.

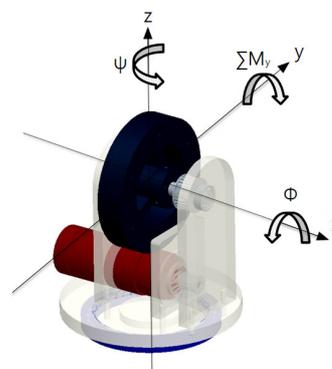


Fig. 2 Gyro-wheel assembly

이러한 구조에 의하여 x 축을 중심으로 고속 회전하는 자이로휠을 z 축 방향(yaw)으로 제어함으로써 피치(θ) 방향의 모멘트를 발생시켜 전체 몸체를 제어하게 된다.

2.1 비틀림 자이로 휠의 해석

Fig. 2 와 같이 공간상에서 회전하는 자이로휠의 운동방정식은 다음의 식(1-4)와 같이 표현된다.

$$\sum \mathbf{M}_o = \dot{\mathbf{H}}_o \tag{1}$$

$$\sum \mathbf{M}_x = I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} - I_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} - I_{xz} \frac{d\omega_z}{dt} - \Omega_z (-I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z) + \Omega_y (-I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z) \tag{2}$$

$$\sum \mathbf{M}_y = -I_{yx} \frac{d\omega_x}{dt} + I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} - I_{yz} \frac{d\omega_z}{dt} + \Omega_z (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) - \Omega_x (-I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z) \tag{3}$$

$$\sum \mathbf{M}_z = -I_{zx} \frac{d\omega_x}{dt} - I_{zy} \frac{d\omega_y}{dt} + I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} - \Omega_y (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) + \Omega_x (-I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z) \tag{4}$$

여기서 \mathbf{M}_o 는 회전 중심에서의 모멘트이며, \mathbf{H}_o 는 회전 모멘텀, I_{xx} 는 회전관성 모멘트, Ω_x 는 고정좌표계에 대한 xyz 좌표계의 회전속도, 그리고 ω_x 는 xyz 좌표계에서의 해당 축 각속도이다. Fig. 1 에서 보는 바와 같이 도립진자의 몸체의 운동은 y 축(pitch)을 제외한 나머지 두 축은 구속되어 있으므로, Fig. 2 의 자이로휠 부분이 발생시키는 y 축에 관련된(pitch) 모멘트 방정식만 다시 정리하면 식 (5)와 같다.

$$\sum \mathbf{M}_y = -I_{yx} \frac{d\omega_x}{dt} + I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} - I_{yz} \frac{d\omega_z}{dt} + \Omega_z (I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) - \Omega_x (-I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z) \tag{5}$$

식 (5)는 우변에 많은 항목을 포함하고 있지만, 본 연구에서 목표로 하는 도립진자 시스템의 특성에 따라 몇 가지 가정을 하면, 다루기 쉽고 비교적 잘 맞는 근사 시스템으로 모델링 할 수 있다. 해당

시스템의 특성상 다음과 같은 3 가지 가정을 한다.

- A. 자이로휠은 일정한 속도로 회전한다.
- B. Fig. 2 에서 자이로휠이 부착된 어셈블리 전체의 구동(yaw) 또한 일정한 속도로 회전한다.
- C. 자이로휠은 지면에 수직으로 위치한다.

본 연구에서는 정속 제어기와 서보팩을 사용하여 A 와 B 가정과 근사하게 구현하였으며, 가정 C 같은 경우는 실제로 작동할 때 그 범위가 $\pm 2^\circ$ 를 잘 넘지 않으므로 충분히 근사화 하여 계산할 수 있다고 판단된다. 이렇게 가정을 하고 다시 식(5)를 정리하면

$$\sum \mathbf{M}_y = \sum \mathbf{M}_\omega = I_{xx} \Omega_z \omega_x = 0.5m_1 r^2 \Omega_z \omega_x \tag{6}$$

와 같이 식이 정리된다. 여기서 $I_{xx} = 0.5m_1 r^2$ 은 실린더 모양으로 가공된 자이로휠의 질량 관성모멘트이며, 여기서 m_1 은 회전체의 질량, 그리고 r 은 회전체의 반지름이다. Fig. 2 의 전체 어셈블리를 Yaw 방향으로 회전(Ω_z)함으로써 y' 축에 대한 토크를 발생시키게 된다.

2.2 전체 시스템의 해석

Fig. 2 에 도시된 자이로휠에서 발생한 토크는 전체 회전부를 y' 축(pitch) 상에서 안정화 시키게 된다.

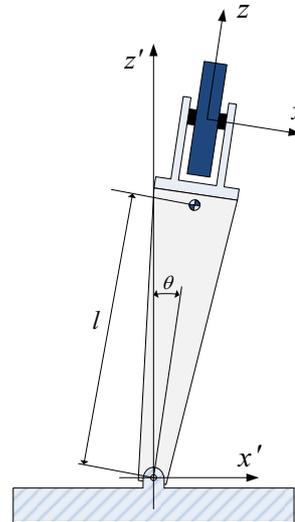


Fig. 3 System body diagram

회전부의 무게 중심까지의 거리와 해당 환산 집중질량을 각각 l 과 m 이라고 하고 전체 회전부의 자세 제어를 위해 필요한 힘을 종합해 보면, 중력으로 인해 힌지에서 회전부가 받게 되는 모멘트는 식 (7)과 같다.

$$\tau = mgl \sin\theta \quad (7)$$

또한 전체 회전부를 회전하기 위해 필요한 모멘트는,

$$M_r = I_y \ddot{\theta} = 0.5m_2 l_A^2 \ddot{\theta}, \quad (8)$$

로 구해진다. 여기서 $I_y = 0.5m_2 l_A^2$ 는 단순화 시킨 회전부 전체의 질량 관성모멘트이다. 따라서 전체 시스템을 제어하기 위해 필요한 모멘트의 합은 식 (9)와 같이 정리된다.

$$\sum M_p = mgl \sin\theta + I_y \ddot{\theta} \quad (9)$$

그러므로 식 (6)에서 계산된 자이로휠이 공간 상에서 발생시키는 모멘트는 식 (9)와 같은 회전부 전체에 필요한 모멘트와 균형을 이루도록 자세제어를 수행한다.

3. 시뮬레이션

3.1 시뮬레이션 개요

위 동역학 식과 실제 실험에 사용된 파라미터들을 토대를 토대로 전체 시스템의 자세제어 시뮬레이션 및 제어기 설계를 수행하였다. 시뮬레이션에 적용된 파라미터들은 아래와 같다.

- mass of system = 2.5kg
- mass of gyro wheel = 0.5kg
- length of system = 0.5m
- radius of wheel = 0.05m
- angular velocity of wheel = 418 rad/s

또한, 실제 실험 시 발생할 수 있는 노이즈 및 진동을 고려해 화이트 노이즈 또한 실제 실험치를 환산하여 일정량을 더해 주었다. 그리고 초기 무게 중심 오차값은 0.5 도로 설정하였으며, 안정화

후 20 초 지점에서 순간적으로 5 도의 큰 외란을 발생시켜 시스템의 안정화 능력을 시험하였다.

3.2 제어기의 설계

본 연구에서 사용된 제어기의 기본 구조는 산업용으로 많이 검증된 디지털 PD 제어기 구조를 사용하였으나, 비틀림 자이로휠의 제어를 위하여 특수한 2 가지의 기능을 추가적으로 제안하고 검증하였다.

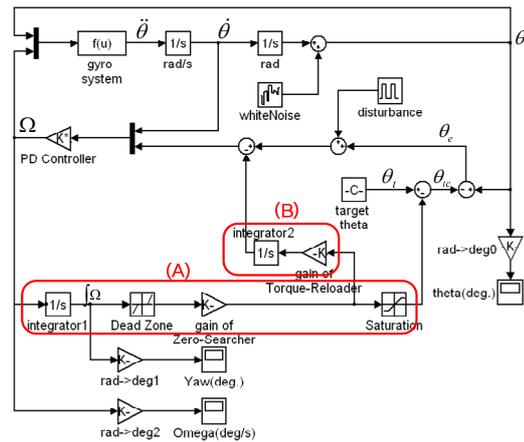


Fig. 4 Block diagram of the twisted gyro wheel controller

첫 번째 기능은 구동부의 초기 무게중심 원점 설정이 어느 정도 틀리더라도 이를 자동으로 보정해 주는 원점제어기능(zero-searcher)이다. 이는 실제 시스템의 구동 시, 정확하게 초기 원점을 맞추지 않아도 자동으로 이를 제어해 주는 중요한 기능이며, Fig. 4 의 블록선도에 해당 블록(A)을 표기하였다. 이는 센서와 액추에이터에서 발생하는 오프셋을 적분기능을 통하여 목표 위치(θ_t)를 보정하여 보정된 목표점(θ_{tc})을 생성하여, 루프에 삽입함으로써 자동 조정 기능을 가지게 하였다.

나머지 하나의 기능은 지속적인 토크를 발생하기 위하여 yawing 제어를 자동적으로 원점으로 복귀하는 토크리로더(torque-reloader) 기능인데, 이는 제어의 액추에이터에 해당하는 z 축 회전부(ψ)가 각도가 90 도에 이르면 더 이상 토크를 발생시키지 못하므로 제어 토크 발생 후 발생한 z 축 회전부를 적분기를 사용하여 느린 속도로 원점으로 되돌리는 기능이다. 이 기능 블록 또한 Fig. 4 에 블록 (B)로 명기하였다.

Fig. 4 의 블록다이어그램에서 보는 바와 같이

기본적으로 제어기는 시스템의 기울어진 각도를 이용해서 PD 제어를 사용하며, PD 게인은 시뮬레이션을 이용해 P 게인을 20, D 게인을 60 으로 설계하였다. 게인의 설정은 지글러 니콜스 방법을 약간 완화한 방법을 이용하여 시행 착오법으로 튜닝하였다.

3.3 원점제어기능(zero-searcher)의 효과

도립진자 시스템은 반드시 초기 시작의 기준점으로 무게중심이 지상과 수직인 상태(90 도)에서 시작되어야 한다. 예를 들어, 만약 수직상태보다 기울어진 상태(90.5 도)에서 시작할 경우, 시스템은 기울어진 만큼 오차를 담은 각도를 90 도로 인식하여 그 각도를 유지하려 하게 된다. 이러한 특징이 일반적인 모터 제어 등에서는 큰 영향이 없을 수도 있지만, 본 연구에서 대상으로 하는 비틀림 자이로의 경우, 자이로휠의 전체 구동부를 회전시킴으로써 토크를 발생시키므로, 무한히 지속적으로 z 축을 회전할 수 없기 때문에 이러한 초기치를 자동으로 제어해주는 장치가 필요하다. Fig. 5 는 이러한 원점제어기능이 없는 상태에서의 시뮬레이션이다.

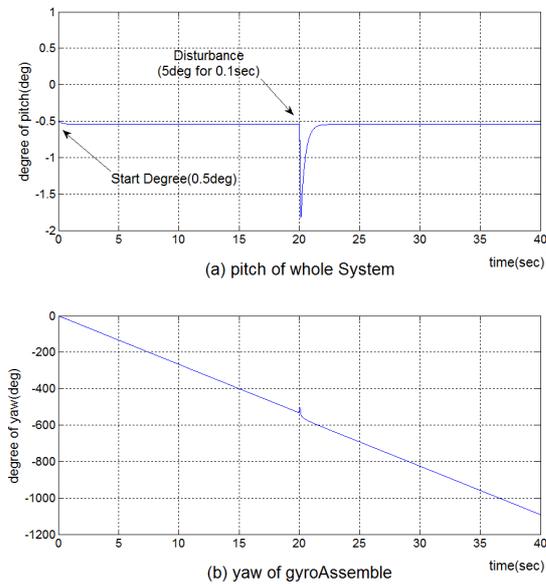


Fig. 5 Simulation without zero-searcher

Fig. 5 는 무게중심이 수직보다 0.5 도 기울어진 상태에서의 피치각(a)과 z 축의 제어 입력각도(b)를 보여준다. 이런 상황이 발생할 경우 시스템은

0.5 도 기울어진 상태를 지속적으로 유지하려고 하기 때문에, 중력에 반하여 시스템에서 계속적으로 토크를 발생시켜 주어야 하여 Fig. 5 의 (b)와 같이 z 축의 제어 입력이 계속 지속적으로 회전하여야 균형이 유지된다. 하지만 실제 실험에서는 물리적으로 z 축이 계속 회전할 수 없기 때문에 결국은 넘어지게 된다.

이에 반하여 3.1 절에서 설명한 원점제어기능(zero-searcher)이 있는 경우, Fig. 6 과 같이 초기 무게중심 설정에 약간의 초기오차가 있어도 자동적으로 정확한 원점으로 복귀하는 것을 알 수 있다.

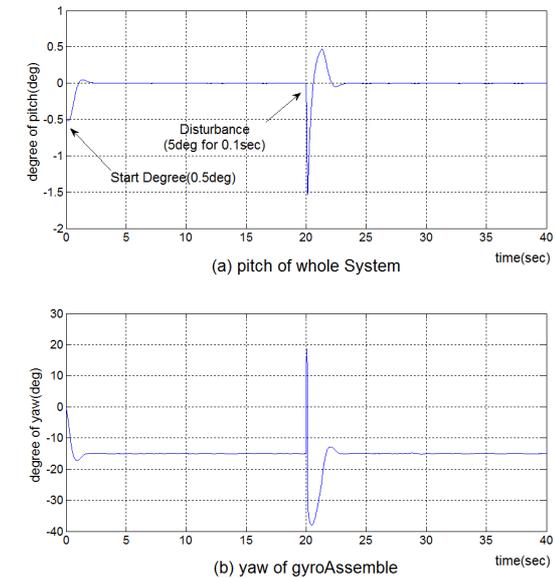


Fig. 6 Simulation with zero-searcher

3.4 토크 리로더(torque-reloader)의 효과

Fig. 6 의 그래프(b)에서 보는 바와 같이 자이로 휠이 약 -15 도 비틀어지면서 토크를 발생시켜 무게중심을 잡은 후, 계속 -15 도에 머물러 있는 모습을 볼 수 있다. 이러한 상황이 지속적으로 발생하여 한쪽 방향으로 여러 차례 토크를 발생시킬 경우, z 축의 회전이 90 도를 넘어 버려 힘의 방향이 반대로 발생할 수 있으므로 비틀림 자이로 방식의 제어에서는 지속적인 토크의 발생을 위하여 z 축을 지속적으로 안전위치(safe zone)로 되돌려주는 것이 지속적인 제어를 위하여 필요하다.

따라서, Fig4 의 (b)에서 보는 바와 같이 자이로 휠의 Yaw 각의 적분 값에 대해 일정한 게인을 곱한 후, 목표 각도 값에 더해 시스템에 영향을 거

의 미치지 않으면서 자이로 휠을 다시 초기상태로 돌려주는 토크리로더(torque-reloader) 기능을 개발 및 적용하였다. Fig. 7의 그래프(b)를 보면, Fig. 6의 (b)와는 달리, 토크를 발생시킨 직후, z 축이 다시 정해진 초기값을 향해 원위치하는 특징을 볼 수 있다.

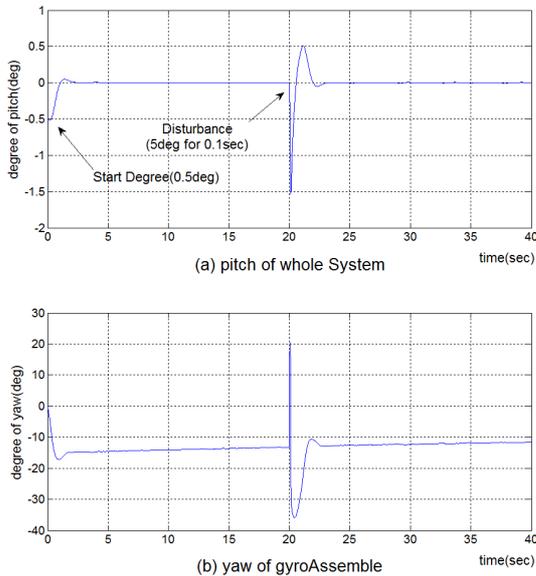


Fig. 7 Simulation with zero-searcher & torque-reloader

여기에서 안전위치(Safe zone)는 ± 5 도로 설정해 주어 자이로휠이 그 안에 있을 경우에는 yaw 각에 대해 피드백을 끊게 된다(Fig. 4(a)의 레드존에서 무시되는 부분이 본 시스템의 안전위치임).

Fig. 7의 (b)를 보면 0 초에서 2 초간 자이로휠이 yaw 방향으로 최대 -15 도를 회전시켜 시스템의 무게중심을 자동으로 설정한다. 그 후 시스템이 정확히 수직이 된 상태에서 안전위치(safe zone)로 z 축이 시스템에 영향을 미치지 않는 속도로 천천히 수렴을 하는 것을 확인할 수 있다.

20 초 지점에서 외란(0.1 초간 -5 도)으로 인해 시스템이 크게 흔들렸을 경우에도 순간적으로 토크를 발생시킨 후, 다시 무게중심방향 토크를 발생시키면서 수직상태로 가는 것을 확인할 수 있다.

4. 실험

4.1 실험기구 및 컨트롤러

설계된 전체 시스템의 모습은 Fig. 8 과 같으며, 우선 자이로휠 구동부를 보면 0.5kg 의 알루미늄 재

질의 바퀴를 DC 모터에 연결하여 약 4000rpm 의 속도로 정속 구동시키게 되며, 이 전체 어셈블리를 하부에 장착된 서보 모터가 20.94rad/sec 의 속도로 좌·우로 비틀어줌으로써 Fig. 1의 y' 축 방향으로 토크를 발생시킨다.

구동부와 지지부를 연결시켜주는 링크부는 전 단력 및 하중에도 충분히 견딜 수 있도록 알루미늄을 이용하여 제작하였다. 그리고 아래쪽 축 끝에 엔코더를 연결시켜 시스템의 기울어진 각도를 측정할 수 있도록 하였다. 가장 아래쪽 지지부는 안정감을 위해서 프로파일을 이용하여 틀을 짠 후 무거운 추를 올려서 흔들림을 방지하였다. 마지막으로 고속으로 회전하는 휠로 인한 사고방지를 위해 아크릴 파이프를 이용하여 전체적으로 커버를 씌웠다. 비틀림 자이로휠 방식에서 발생시킬 수 있는 토크는 상대적으로 크기 때문에 기구물 설계 시 전체 무게에 비교적 덜 구애 받을 수 있는 장점이 있다.



Fig. 8 Experimental apparatus

제어기에 사용된 DSP 는 Fig. 9 와 같이 DSP320F2812 를 사용하였으며, 시스템의 각도 피드백을 위하여 1 회전에 8000 펄스를 발생시키는 정밀한 엔코더를 y' 축에 사용하였고, 샘플링 주파수는 100 Hz 로 제어하였다.

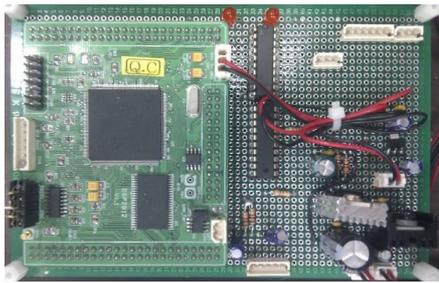


Fig. 9 Controller using DSP320F2812

4.2 실험결과

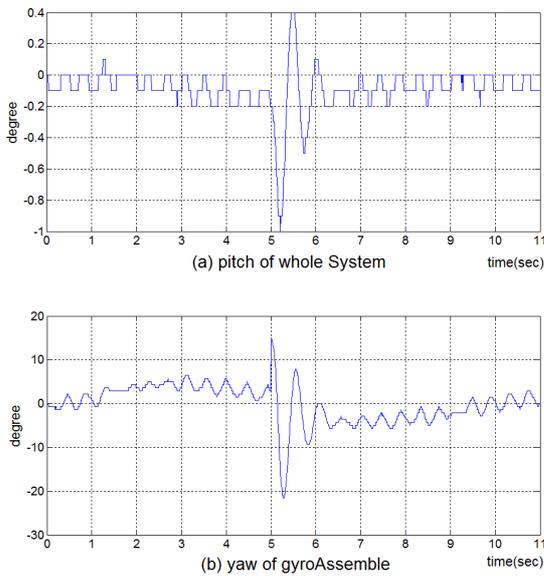


Fig. 10 Result of the experiment

Fig. 8 및 9 에 보여진 실험장치와 제어기를 사용하여, 실제 실험한 결과를 Fig. 10 에 도시하였다. 시뮬레이션과 동일하게 외란에 대한 강인함을 테스트하기 위하여 5 초 지점에서 1 도의 엔코더 외란을 준 결과, Fig. 10 의 (b)에서 보는 바와 같이 자이로휠이 순간적으로 15 도 가량 비틀어지고 그 힘으로 인해 시스템이 -1 도 가량 기울어진다.¹⁴

그 후 약 2 초간 흔들린 후에, 6 초에 시스템이 원점으로 안정화 되는 것을 확인할 수 있으며, 6 초 지점부터는 토크 리로더(torque-reloader)의 역할에 의해 자이로휠이 시스템에 영향을 거의 주지 않는 속도로 초기 위치로 되돌아 가는 모습을 볼 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 정속 구동하는 자이로 휠을 그 회전축과 직각 축으로 비틀림 제어하여 외부 토크를 발생시켜 도립진자를 제어하는 방법과 그에 필요한 제어기를 설계하였다. 제안된 방식은 기존의 작용-반작용의 관성휠을 사용한 방식에 비하여 발생하는 토크가 크고, 토크를 비교적 오랜 동안 출력시킬 수 있으며, 소형화가 가능한 장점이 있다.

본 논문에서는 제안된 방식의 비틀림 자이로 휠의 제어를 위하여 스스로 로봇의 무게중심을 찾아 제어하는 알고리즘과, 지속적인 토크 생성을 위하여 자동으로 중립상태를 유지하는 두 가지 새로운 알고리즘을 개발하였다.

시뮬레이션과 실험을 통하여 제안된 방식의 자이로 휠에서 비교적 큰 무게(전체무게 2.5 kg)의 자세 제어를 하기 위한 충분한 힘이 나온다는 것을 확인할 수 있었으며, 제안된 방식의 자세제어기는 소형화가 가능하여 밀폐된 형태의 박스형으로 설계되어 손쉽게 펜들럼 타입의 메커니즘이나 휴머노이드 로봇 등의 자세제어용으로 사용될 수 있다.

참고문헌

1. Dertouzos, M. L. and Roberge, J. K., "High Capacity Reaction Wheel Attitude Control," IEEE Transactions on Applications and Industry, Vol. 83, No. 71, pp. 99-104, 1964.
2. Bobtsov, A. A., Pyrkin, A. A. and Kolyubin, S. A., "Adaptive Stabilization of a Reaction Wheel Pendulum on Moving LEGO Platform," IEEE International Conference on Automation and Logistics, pp. 1218-1223, 2009.
3. Zhang, L. and Tu, Y., "Research of Car Inverted Pendulum Model Based on Lagrange Equation," The 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, pp. 820-824, 2006.
4. Park, M.-S. and Chwa, D. K., "Swing-Up and Stabilization Control of Inverted-Pendulum Systems via Coupled Sliding-Mode Control Method," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 56, No. 9, pp. 3541-3555, 2009.
5. Shiriaev, A. S., Freidovich, L. B., Robertsson, A., Johansson, R. and Sandberg, A., "Virtual-Holonomic-Constraints-Based Design of Stable Oscillations of

- Furuta Pendulum: Theory and Experiments,” IEEE Transactions on Robotics, Vol. 23, No. 4, pp. 827-832, 2007.
6. Santibanez, V., Kelly, R. and Sandoval, J., “Control of the Inertia Wheel Pendulum by Bounded Torques,” Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 8266-8270, 2005.
 7. Aguilar, L. T., Boiko, I., Fridman, L. and Freidovich, L., “Inducing Oscillations in an Inertia Wheel Pendulum via Two-Relays Controller: Theory and Experiments,” American Control Conference, pp. 65-70, 2009.
 8. Aguilar-Ibanez, C. F., Gutierrez F, O. O. and Suarez Castanon, M. S., “Stabilization of the strongly damping inertia wheel pendulum by a nested saturation functions,” American Control Conference, pp. 3434-3439, 2008.
 9. Bapiraju, B., Srinivas, K. N., Prem. Kumar P. and Behera. L., “On Balancing Control Strategies for a Reaction Wheel Pendulum,” IEEE India Annual Conference, pp. 199-204, 2004.
 10. He, G.-P. and Geng, Z.-Y., “Optimal Motion Planning for Differentially Flat Underactuated Mechanical Systems,” IEEE International Conference on Automation and Logistics, pp. 1567-1572, 2008.
 11. Ortega, R., Spong, M. W., Gomez-Estern, F. and Blankenstein, G., “Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems Via Interconnection and Damping Assignment,” IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 8, pp. 1218-1233, 2002.
 12. Anthony, B. and Wallace, F., “Engineering Mechanics DYNAMICS,” Prentice Hall, pp. 495-561, 2006.
 13. Andrew, P. and Jaan K., “SI Dynamics,” Inter Vision, pp. 531-609, 2005.
 14. <http://www.youtube.com/watch?v=eoJuuEzIZYk>