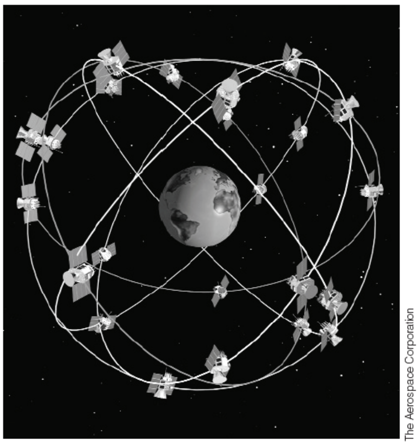
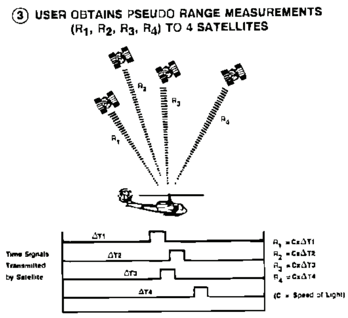
Week 12

전기전자개론



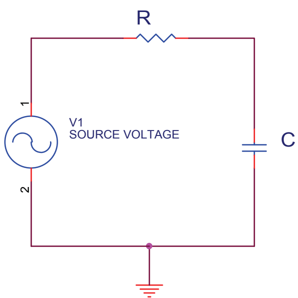
Timation TS-1
Credit: US Navy



Week 12

Capacitor 교류 회로 해석

Capacitor가 포함된 회로의 교류 입력에 대한 해석



A. 미분방정식의 해

A. 미분 방정식의 시간 영역에서의 해를 구한다.

$$v_c(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t + \frac{1}{RC}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = \frac{1}{RC}V\cos\omega t$$

$$(\frac{A}{RC} - B\omega)\sin\omega t + (A\omega + \frac{B}{RC} - \frac{V}{RC})\cos\omega t = 0$$

$$\therefore v_c(t) = \frac{V\omega RC}{1+\omega^2(RC)^2}\sin\omega t + \frac{V}{1+\omega^2(RC)^2}\cos\omega t$$

미분방정식의 해

$$v_c(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t = C\sin(\omega t + \phi) = C\cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})$$

$$A = \frac{V\omega RC}{1+\omega^2(RC)^2}, B = \frac{V}{1+\omega^2(RC)^2}, C = \sqrt{A^2+B^2}, \phi = \tan^{-1}(\frac{B}{A})$$

만약 R=1000, C=0.1uF, f=1.6kHz, Vs=5Vpp일 때

$$C = 1.763, \quad \phi = 45°$$

$$\therefore v_c(t) = C\cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) = \underline{1.763\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})}$$

B. Phasor를 이용한 해

$$\mathbf{V}_c = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\mathbf{V}_s = \frac{1}{RC\omega j+1}\mathbf{V}_s$$

분모 분자에 $1-RCj\omega$ 를 곱해주면

$$= \frac{1-RCj\omega}{1+(RC\omega)^2}\mathbf{V}_s = \left(\frac{1}{1+(RC\omega)^2} - j\frac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2}\right)\mathbf{V}_s$$

만약 R=1000, C=0.1uF, f=1.6kHz, Vs=5Vpp일 때

$$\mathbf{V}_c = (0.4973 - j0.5000)\times 2.5\angle 0 = 0.7058\angle(-45°)\times 2.5\angle 0$$

$$\underline{= 1.76\angle(-45°)}$$

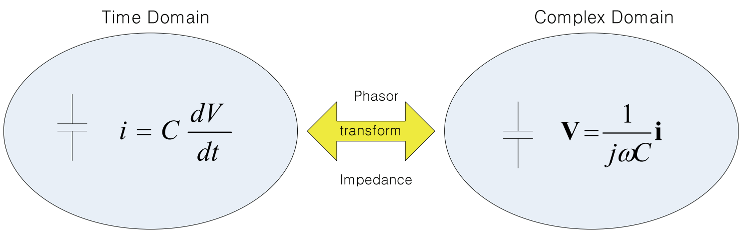
교류 회로의 해석 순서

- 정현파 신호를 구별하고 여진(Excitation) 주파수를 주목한다.
- 소스를 Phasor 형태로 변환한다.
- 각 회로의 소자를 그것의 임피던스로 표현한다.
- 적당한 회로망해석을 이용하여 Phasor회로를 해석한다.

교류해석에서 Phasor를 사용하는 이유

1. 시간 영역(time domain)에서의 인덕터, 커패시터의 전압-전류 관계식은 시간에 대한 미분방정식으로 표현되므로 이를 풀기가 매우 까다로움
2. 만약 회로의 전압-전류 관계식에서 정현파만 고려한다면 이를 복소수를 이용한 Phasor 표기법을 사용하여(particular solution을 이용) 미분방정식을 풀지 않고도 대수적인 방법으로 회로의 계산에서 필요한 가감승제를 해결할 수 있다.

교류해석에서 Phasor를 사용하는 이유

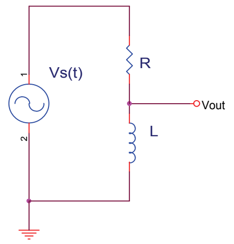


입출력으로 정현파만 고려한다는 전제조건이 깔려있다.

❖ 복소수를 사용하여 Phasor 및 임피던스의 개념을 사용하면 직류해석에서 만들어 놓았던 많은 기본 해석의 툴(tool)들을 그대로 사용할 수 있다.

Week 12

Voltage Divider Example



$$R = 10, L = 1H, \omega = 10\ rad/s, V_s = 5\cos(10t)$$

$$\mathbf{V}_{out}(j\omega) = \frac{Lj\omega}{R + Lj\omega}\mathbf{V}_s(j\omega)$$

$$= \frac{j10}{10 + j10} \times 5\angle 0° = \frac{10\angle 90°}{10\sqrt{2}\angle 45°} \times 5\angle 0°$$

$$= 3.54\angle 45°$$

❖ Voltage divider 공식에 임피던스와 페이저를 이용하여 계산

Week 12

AC 회로의 페이저 해석 예제

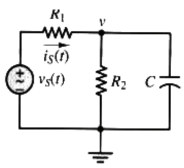


그림 4.42

미지 : 소스 전류 $i_S(t)$.

해석 : 가장 위의 노드에서 전압 v를 정의하고, v를 정하기 위하여 노달 해석을 사용한다. 그러면 다음을 알 수 있다.

$$i_S(t) = \frac{v_S(t) - v(t)}{R_1}$$

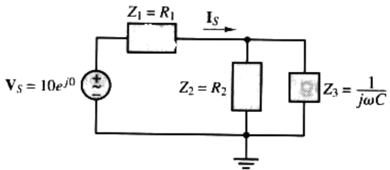
페이져 해석예제

다음으로, 방법 및 절차의 단계들-교류 회로 해석을 수행한다.

Step 1: $v_S(t) = 10\cos\ \omega t$ V $\qquad \omega = 377$ rad/s $\qquad (f = 60$ Hz$)$

Step 2: $\mathbf{V}_S(j\omega) = 10\angle 0$ V

Step 3: $Z_{R1} = R_1 \qquad Z_{R2} = R_2 \qquad Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$



페이져 해석예제

Step 4: 다음으로 노달 해석을 사용하여 소스 전류를 계산한다. 처음 **V**를 구한다.

$$\frac{\mathbf{V}_S - \mathbf{V}}{Z_{R1}} = \frac{\mathbf{V}}{Z_{R2}||Z_C}$$

$$\frac{\mathbf{V}_S}{Z_{R1}} = \mathbf{V}\left(\frac{1}{Z_{R2}||Z_C} + \frac{1}{Z_{R1}}\right) = \mathbf{V}\left(\frac{1}{\dfrac{R_2\cdot(1/j\omega C)}{R_2 + (1/j\omega C)}} + \frac{1}{R1}\right)$$

$$= \mathbf{V}\left(\frac{j\omega C R_2 + 1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) = \mathbf{V}\left[\frac{(j\omega C R_2 R_1 + R_1) + R_2}{R_1 R_2}\right]$$

$$\mathbf{V} = \left[\frac{(j\omega C R_2 R_1 + R_1) + R_2}{R_1 R_2}\right]^{-1}\frac{\mathbf{V}_S}{R_1} = \left[\frac{R_1 R_2}{(j\omega C R_2 R_1 + R_1) + R_2}\right]\frac{\mathbf{V}_S}{R_1}$$

$$= \left[\frac{50\times 200}{(j377\times 10^{-4}\times 50\times 200 + 50) + 200}\right]\frac{\mathbf{V}_S}{50}$$

$$= 0.4421\angle(-0.9852)\mathbf{V}_S = 4.421\angle(-0.9852)$$

페이저 해석예제

다음 $\mathbf{I}_S$를 계산한다.

$$\mathbf{I}_S = \frac{\mathbf{V}_S - \mathbf{V}}{Z_{R1}} = \frac{10\angle 0 - 4.421\angle(-0.9852)}{50} = 0.1681\angle(0.4537)$$

Step 5: 최종적으로 페이저 답을 시간 영역 표시로 바꾼다.

$i_S(t) = 0.1681\cos(377t + 0.4537)$

페이저 해석예제

- 지난 예제에 대하여 임의의 정현파 입력에 대한 교류 회로의 해를 구하여라

-> 결과적으로 주파수의 함수로 구해진다.

소스 전류는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{I}_S = \frac{\mathbf{V}_S}{Z_{R1} + Z_{R2} \| Z_C}$$

페이져 해석예제

병렬 임피던스 $Z_{R2} \| Z_C$가 다음과 같은 표현으로 얻어진다.

$$Z_{R2}||Z_C = \frac{Z_{R2} \times Z_C}{Z_{R2} + Z_C} = \frac{200 \times 10^4/j\omega}{200 + 10^4/j\omega} = \frac{2 \times 10^6}{10^4 + j\omega 200}\ \Omega$$

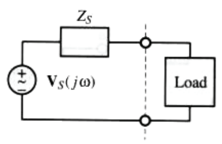
그러므로 총 직렬 임피던스는

$$Z_{R1} + Z_{R2}||Z_C = 50 + \frac{2 \times 10^6}{10^4 + j\omega 200} = \frac{2.5 \times 10^6 + j\omega 10^4}{10^4 + j\omega 200}\ \Omega$$

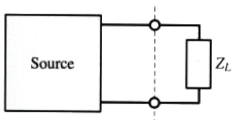
최종적으로

$$\mathbf{I}_S = \frac{\mathbf{V}_S}{Z_{R1} + Z_{R2}||Z_C} = A\angle\phi \frac{10^4 + j\omega 200}{2.5 \times 10^6 + j\omega 10^4}\ \mathrm{A}$$

교류의 등가 회로



(a) Equivalent load

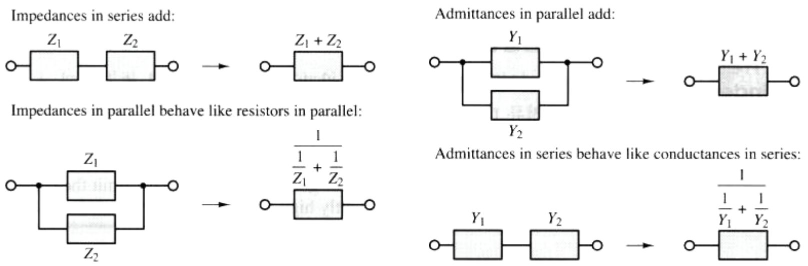


(b) Equivalent source

소스의 관점에 서 본 등가회로

Load의 관점에 서 본 등가회로

교류의 등가 회로



등가 회로 전환

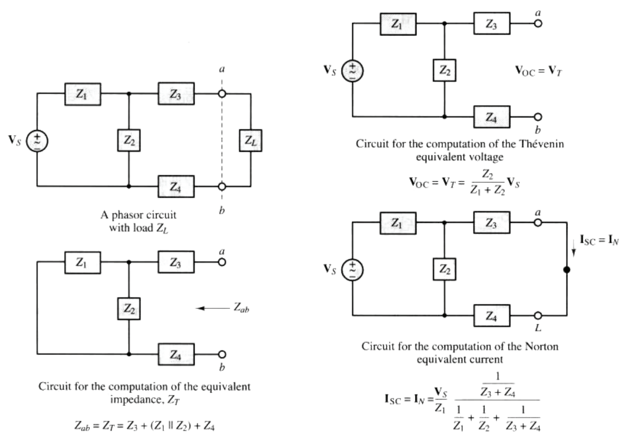
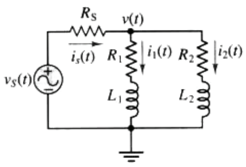


그림 4.46 교류 회로의 등가 형태로의 변환

페이저 해석예제



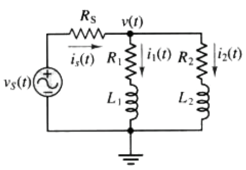
기지 : $R_S = 0.5\ \Omega;\ R_1 = 2\ \Omega;\ R_2 = 0.2\ \Omega;\ L_1 = 0.1\ \text{H};\ L_2 = 20\ \text{mH}.$
$v_S(t) = 155\cos(377t)\ \text{V}.$

미지 : 모터의 부하 전류 $i_1(t)$와 $i_2(t)$.

먼저 소스와 각 모터의 임피던스를 계산한다.

$$Z_S = 0.5\ \Omega$$
$$Z_1 = 2 + j377 \times 0.1 = 2 + j37.7 = 37.75\angle 1.52\ \Omega$$
$$Z_2 = 0.2 + j377 \times 0.02 = 0.2 + j7.54 = 7.54\angle 1.54\ \Omega$$

페이저 해석예제



소스 전압은 $\mathbf{V}_S = 155 \angle 0$ V이다.

다음으로, 맨 위의 노드에서 노드 전압 $\mathbf{V}$를 구하기 위하여 KCL을 적용한다.

$$\frac{\mathbf{V}_S - \mathbf{V}}{Z_S} = \frac{\mathbf{V}}{Z_1} + \frac{\mathbf{V}}{Z_2}$$

$$\frac{\mathbf{V}_S}{Z_S} = \frac{\mathbf{V}}{Z_S} + \frac{\mathbf{V}}{Z_1} + \frac{\mathbf{V}}{Z_2} = \mathbf{V}\left(\frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)$$

$$\mathbf{V} = \left(\frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)^{-1}\frac{\mathbf{V}_S}{Z_S} = \left(\frac{1}{0.5} + \frac{1}{2 + j37.7} + \frac{1}{0.2 + j7.54}\right)^{-1}\frac{\mathbf{V}_S}{0.5}$$

$$= 154.1\angle 0.079\ \text{V}$$

페이저 해석예제

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{Z_1} = \frac{154\angle 0.079}{2 + j37.7} = 4.083\angle -1.439$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{Z_2} = \frac{154\angle 0.079}{0.2 + j7.54} = 20.44\angle -1.465$$

최종적으로, 전류를 시간-영역 표기로 나타낼 수 있다.

$$i_1(t) = 4.083\cos(377t - 1.439) \qquad \text{A}$$

$$i_2(t) = 20.44\cos(377t - 1.465) \qquad \text{A}$$

페이저 해석예제

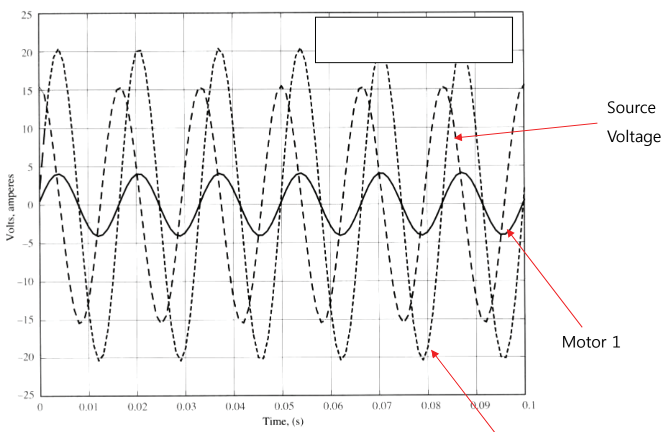
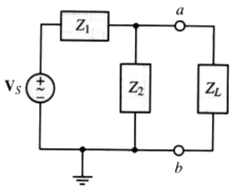


그림 4.48 소스 전압과 모터 전류의 그래프

페이저를 이용한 등가회로

교류 회로의 테브닌 등가



$V_S = 110\angle 0°$ $Z_1 = 5\ \Omega$ $Z_2 = j20\ \Omega$

그림 4.49

$$Z_T = Z_1 \| Z_2 = \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5 \times j20}{5 + j20} = 4.71 + j1.176\ \Omega$$

다음으로, 단자 a와 b 사이의 개방 회로 전압을 계산한다.

$$\mathbf{V}_T = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\mathbf{V}_S = \frac{j20}{5 + j20} 110\angle 0 = \frac{20\angle \pi/2}{20.6\angle 1.326} 110\angle 0 = 106.7\angle 0.245\ \text{V}$$

페이저를 이용한 등가회로

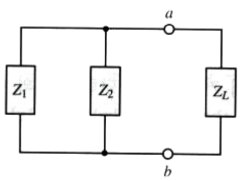


그림 4.50

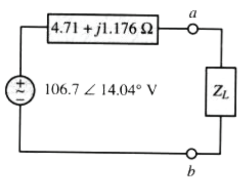
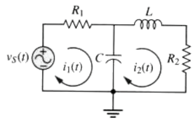


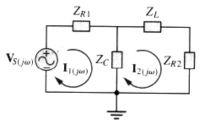
그림 4.51

망전류법을 이용한 AC 해석

망해석에 의한 AC 회로의 예



(a)



(b)

기지 : 회로 요소의 값. $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 75\ \Omega$, $C = 1\ \mu F$, $L = 0.5$ H. 전류 소스의 값은 $v_S(t) = 15\cos(1,500t)$ V이다.

망전류법을 이용한 AC 해석

Step 1: $v_S(t) = 15\cos(1{,}500t)$ $\quad \omega = 1{,}500$ rad/s
Step 2: $V_S(j\omega) = 15\angle 0$
Step 3: $Z_{R1} = R_1 \qquad Z_{R2} = R_2 \qquad Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} \qquad Z_L = j\omega L$

최종 페이저 회로는 그림 4.53(b)에 제시되었다.

Step 4: 메시 해석법을 사용하여 소스 전류에 대하여 푼다. 먼저 메시 방정식을 작성하면 다음과 같다.

$$\mathbf{V}_S(j\omega) - Z_{R1}\mathbf{I}_1(j\omega) - Z_C[\mathbf{I}_1(j\omega) - \mathbf{I}_2(j\omega)] = 0 \qquad \text{mesh 1}$$
$$Z_C[\mathbf{I}_2(j\omega) - \mathbf{I}_1(j\omega)] + Z_L\mathbf{I}_2(j\omega) + Z_{R2}\mathbf{I}_2(j\omega) = 0 \qquad \text{mesh 2}$$