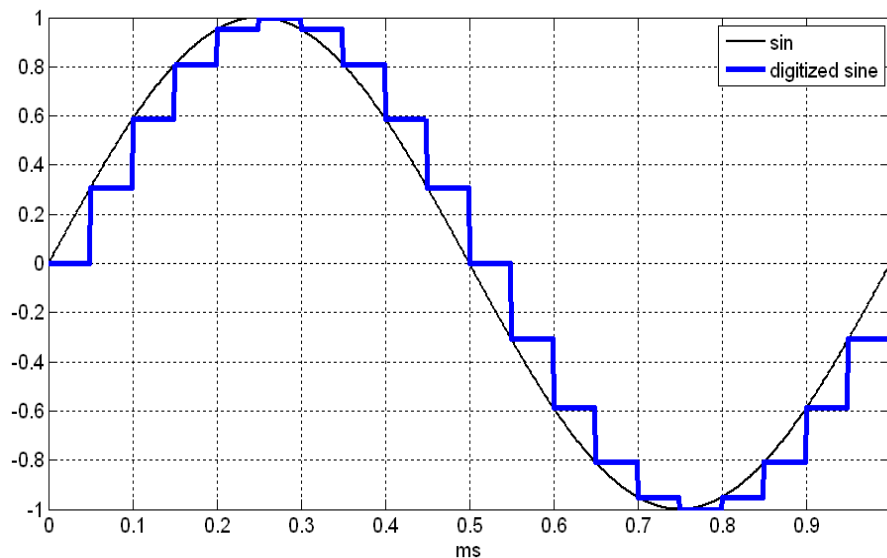


## ■ 샘플링 법칙 sampling theorem과 알리아싱 aliasing

일반적으로 자연계에 존재하는 대부분의 신호는 연속적인 continuous 아날로그 analog 신호이지만, 모션 제어를 포함한 대부분의 현대식 제어기는 DSP나 디지털 컴퓨터를 사용한다. 따라서 이러한 디지털 컴퓨터를 사용하여 신호 처리를 하려면 자연계에 존재하는 이러한 연속적인 신호를 디지털 digital 신호로 바꾸어 주어야 한다.

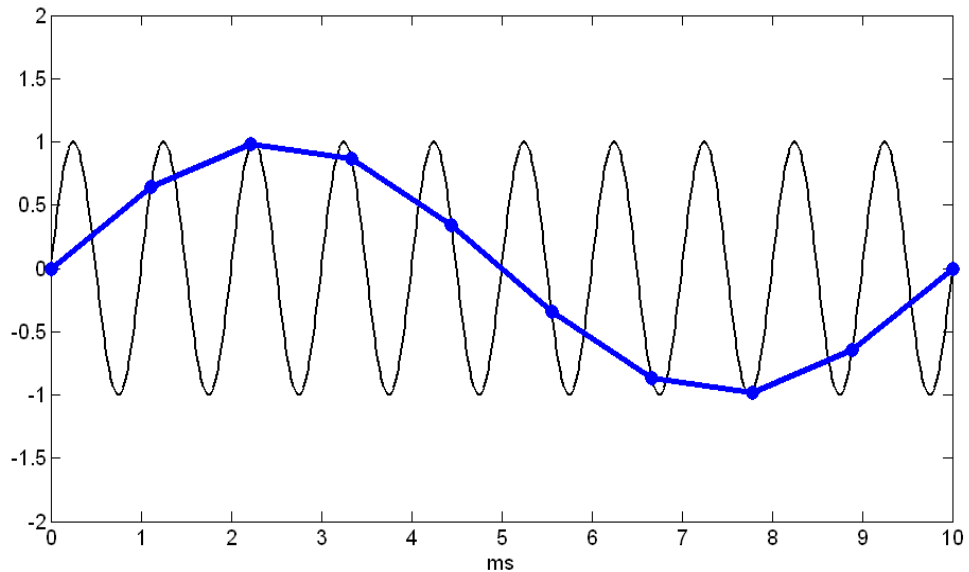
예를 들어, 힘센서 Force sensor에서 나오는 연속적인 데이터를 디지털화 digitize하기 가장 좋은 방법은 A/D변환기 Analog-Digital converter를 사용하는 것인데, A/D변환은 일정 범위의 전압을 정해진 시간마다 정해진 해상도로 변환시키는 과정을 의미한다. 다음의 그림 10.1.1은 1kHz의 정현파를 20kHz의 주파수를 가지고, 샘플링하여 이를 해당 샘플링 sampling 시간동안 유지 holding한 신호를 보여준다.



<그림 10.1.1 연속 Sin 신호와 이산화된 sin 신호>

연속적인 신호를 일정 주기로 샘플링만 한다면, 해당 시간에만 값이 존재하는 불연속적인 임펄스의 나열이 되는데, 이러한 임펄스 열을 샘플 앤 홀더 sample and holder를 통과시키면, 그림 10.1.1에서 보는 것 같은 계단식 신호가 된다. 실제로 A/D 변환기는 변환시 일정 시간이 걸리므로 A/D 변환기 내부에 샘플앤홀더를 내장하여 변환시 걸리는 시간동안 전압을 유지시켜주게끔 되어있는 경우가 많다. A/D 변환이 끝나면 해당 전압이 정해진 범위의 해상도에서 가장 가까운 정수값으로 표현되며, 이를 DSP 나 Microcontroller 내부에서 사용하게 된다.

일정한 주기의 샘플링 작업을 통하면 연속적인 신호를 순간적으로 수치화하여 이산화된 데이터들의 나열로 나타낼 수 있는데, 이러한 샘플링 작업을 얼마나 자주해주는가 하는 것은 얼마나 원래 신호에 가깝게 복원해 낼 수 있는가와 밀접한 관계를 가지고 있다. 이러한 샘플링 주파수에 따라 여러가지 특별한 현상도 발생하며, 잘못하면 원래 신호와는 전혀 다른 신호를 출력하는 경우도 발생한다. 다음의 그림 10.1.2는 1kHz의 정현파 신호를 900Hz의 주파수로 샘플링했을 때의 데이터를 도시한 것이다.



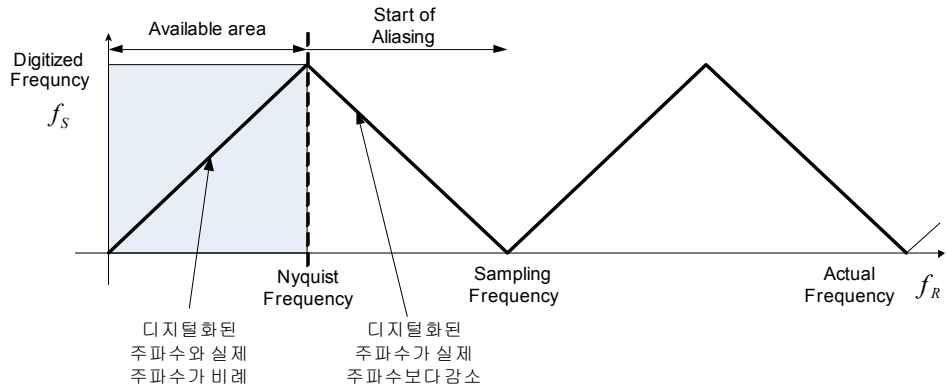
<그림 10.1.2 연속 Sin 신호와 이산화된 sin 신호>

900Hz로 샘플링한 각 데이터들을 선으로 연결해보면 그림 10.1.2에서와 같이 원래의 신호와는 전혀 다른 주파수의 정현파를 볼 수 있는데, 샘플링주파수의 영향으로 발생하는 이러한 현상을 알리아싱(aliasing)이라 한다. 이러한 알리아싱의 영향을 피하기 위해서는 디지털화하려고 하는 신호의 최대 주파수의 2배 이상의 주파수로 샘플링을 해 주어야 하는데, 이를 샘플링 법칙(sampling theorem)이라 한다. 샘플링 법칙은 나이퀴스트(Nyquist)의 샘플링 법칙(혹은 셰논(Shannon)의 샘플링 법칙)이라고도 불리는데, 정리하면 디지털화 하고자 하는 신호의 최대 주파수가 1kHz 라면 최소한 2kHz로 샘플링을 해 주어야 원래의 신호를 복원해 낼 수 있다는 뜻이다. 이는 정현파의 한 주기에서 적어도 2번은 샘플링을 해 주어야(위한번 아래한번) 해당 주파수의 정현파를 복원해 낼 수 있다는 뜻도 된다. 그래서 아날로그-디지털 변환시스템에서 샘플링 주파수의 0.5배 주파수를 나이퀴스트의 이름을 따서 나이퀴스트 주파수(Nyquist frequency)라 칭하고, 보통 샘플링 후 복원될 수 있는 최대 주파수라 간주한다.

실생활에서의 예를 들어보면, CD는 샘플링 주파수가 44.1kHz이므로 CD에 녹음된 음악에서 악기의 소리 중 약 22kHz 이상의 주파수는 아예 CD에 녹음이 되지 않는다는 뜻이다. 이는 인간의 가청주파수 대역이 약 20kHz정도이므로 이

를 고려하여 CD의 샘플링 주파수를 정한 것이라고 보면 된다.

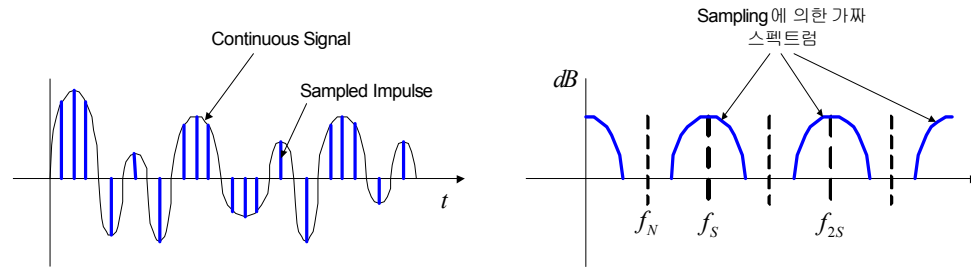
그림 10.1.2에서 볼 수 있는 알리아싱 aliasing 현상은 스펙트럼 선도에서 보면 주파수의 왜곡 및 위상의 왜곡도 가져오는데, 실제의 주파수와 이를 샘플링 했을 때의 디지털 주파수의 관계를 도시하면 그림 10.1.3과 같다.



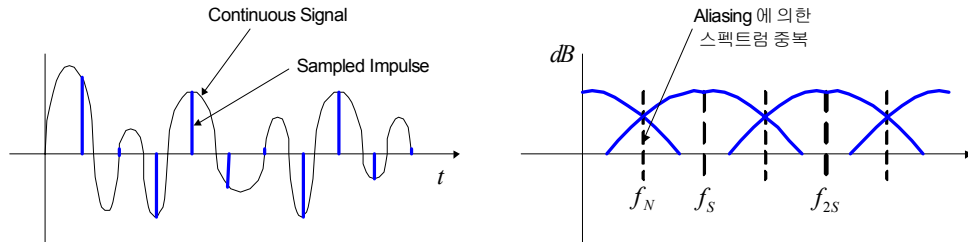
<그림 10.1.3 주파수영역에서의 샘플링 사용가능구간>

그림 10.1.3의 X축은 디지털화하려는 실제 신호의 주파수를 나타내며, Y축은 어떠한 주파수로 샘플링했을 때의 디지털 주파수를 나타낸 것이다. 그림에서 보면 샘플링 시스템의 나이퀴스트 Nyquist 주파수 보다 작은 주파수에서는 실제 주파수와 디지털화된 주파수가 비례하는 것을 볼 수 있는데, 이 구간에서만 디지털화된 주파수를 사용하여 원래의 신호를 복원할 수 있다. 신호 중 나이퀴스트 주파수 이상의 주파수들은 디지털화 했을 때 실재하는 신호보다 더 낮은 주파수로 왜곡되는 것을 알 수 있다.

실제적인 예를 들어 시간영역에서의 신호와 샘플링된 신호의 주파수 영역에서의 스펙트럼 spectrum을 도시하면 그림 10.1.4와 같다. 그림 10.1.4의 (a)는 샘플링 주파수가 충분히 빠른 경우를 도시한 것이다. 오른쪽의 스펙트럼 선도를 보면, 샘플링 효과에 의한 고주파영역의 가짜 스펙트럼이 발생하긴 하지만, 일반적인 경우 샘플링 주파수를 이미 알고 있으므로 샘플링 주파수 이상의 스펙트럼은 무시하면 된다. 이에 반하여 낮은 샘플링 주파수에 의하여 알리아싱 aliasing이 발생하는 경우에는 고주파수 영역의 스펙트럼 spectrum이 중복되는 현상이 발생하여 실재 스펙트럼이 왜곡되는 현상이 발생한다. 따라서 알리아싱 현상이 발생하면, 시간영역에서 신호의 원상 복귀도 어려울 뿐더러, 주파수영역에서도 마찬가지로 왜곡이 발생하게 된다.



(a) 일반적인 샘플링의 경우



(b) 낮은 샘플링 주파수에 의한 Aliasing 현상이 존재할 경우

#### <그림 10.1.4 Aliasing이 존재할 때의 주파수영역에서의 스펙트럼>

상기의 예는 편의상 정현파에 대해서 설명했지만, 정현파가 아닌 임의의 신호의 경우에도 푸리에 급수를 사용하면 모든 주기적인 신호를 정현파의 합으로 치환할 수 있으므로, 정리하면, 선형시스템의 샘플링 주파수를 정할 때, 내가 관심 있는 신호의 최대 주파수를 먼저 인지하고, 이의 2배 이상으로 샘플링 주파수를 결정하면 된다.

엔코더encoder를 사용하는 모션 제어의 경우에는 엔코더가 부착된 구동부가 최대 속도로 움직일 때 발생하는 엔코더의 최대 주파수를 충분히 인지하도록 하드웨어를 설계하면 되는데, 일반적으로 엔코더의 A, B상을 4 체배multiplying하는 경우 4체배 로직의 구도에 필요한 추가적인 주파수를 곱하여 하드웨어의 클럭 주파수를 정해 주어야 한다. 예를 들어 스테이지의 최고 속도가 1m/s이고 이때의 A,B상의 최대 주파수가 1MHz라면, FPGA로 구현된 4체배가 내장된 카운터의 구동 주파수는 최소 4MHz 이상이 되도록 설계하여야 한다.

힘센서 등의 아나로그 센서를 사용하는 경우에는, 전체 제어 시스템의 제어 밴드폭control bandwidth을 고려하여 샘플링 주파수를 정하고, 아나로그-디지털 변환 시스템을 설계하여야 한다.