1.1 선형시스템과 중첩의 원리

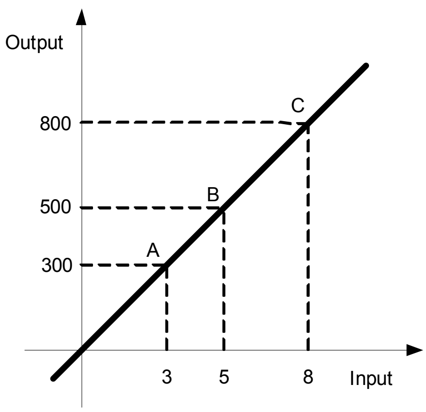
2008.08.09

■ 선형 시스템linear system과 중첩의 원리principle of superposition

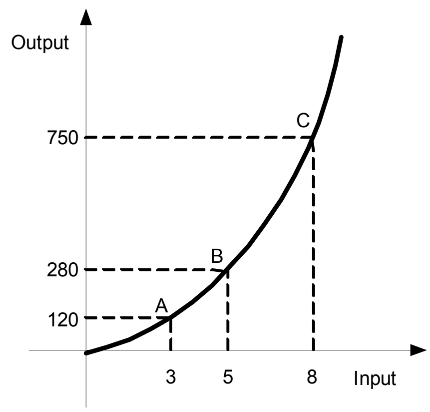
선형시스템linear system이란 해당 시스템의 수학적 모형이 선형 연산operator을 기본으로 한 시스템을 말한다. 어떠한 시스템의 모델이 하나의 미분방정식으로 표기될 때, 그 계수coefficient가 상수거나 혹은 독립변수만의 함수라면 그 미분방정식은 선형이다.

일반적으로 선형시스템은 비선형시스템에 비해서 다루기가 훨씬 쉽고, 대학의 학부과정에서는 대상시스템을 선형시스템으로 제한하는 경우가 많다. 선형시스템 중에서도 시간에 따라서 그 계수 등이 변하지 않는 시스템을 선형시불변linear time-invariant시스템이라 칭하며, 본서에서도 이러한 선형시불변 시스템을 기본으로 내용을 전개해 나갈 것이다.

선형시스템의 가장 큰 특징은 중첩의 원리Principle of superposition가 잘 적용되는 것인데, 이 중첩의 원리는 선형시스템을 분석하고 설계할 때 많이 활용되며, 모델링Modeling과 응답해석Response Analysis에 있어서 매우 중요한 역할을 한다. 중첩의 원리는 어떠한 시스템에서 두 개의 서로 다른 입력을 동시에 가했을 때 얻어지는 출력은, 두 개의 입력을 각각 따로 가했을 때 얻어지는 출력들의 합과 같다는 것이다. 예를 들어 욕조에 목욕물을 받는 경우, 더운물과 찬물을 동시에 틀어서 목욕물의 온도를 맞추는 경우와, 더운물과 찬물을 각각 따로 받아서 섞는 경우에 최종 온도가 같다면, 그 시스템은 중첩의 원리가 적용되는 선형시스템이다. 반면에 어떠한 이유로 그 결과가 다르다면 그러한 시스템은 비선형Non-linear시스템이 된다. 이러한 관계를 입력과 출력의 그래프로 표현하면 다음과 같은 그래프가 된다.



(a) 선형시스템



(b) 비선형시스템

< 그림 1.1.1 선형 시스템과 비선형시스템의 입출력 예 >

선형시스템의 경우, 입력단에서의 합 입력에 대한 출력은 각각의 입력에 대한 출력의 합과 같다. 그림 1.1.1의 (a)에서 보듯이 입력 3 대한 출력이 300, 입력 5에 대한 출력이 500이면 입력8에 대한 출력은 800으로 각각의 출력의 합인 300+500과 같다. 반면 입출력 관계가 (b)와 같은 비선형시스템이면, 입력 3에 대한 출력 120과 입력 5에 대한 출력 280을 합친 값과 입력 8에 대한 출력 값 750이 일치하지 않는다.

따라서 비선형 시스템은 어떠한 초기값이나 동작점operation point을 중심으로 입력단에서 같은 양을 가감하더라도 그 동작점에 위치에 따라 출력 값이 매우 많이 변화하므로 동작점에 대한 정보와 초기값에 대한 정보가 매우 중요하다.

"북경에서의 한 마리 나비의 날개짓이 뉴욕에서 폭풍우를 불러올 수 있다"라고 하는 잘 알려진 예시는, 약간 과장되었긴 하지만 비선형 시스템에서의 이러한 입출력 관계를 잘 나타내 주는 말이다. 몇 년 전 유명해진 카오스chaos이론에는 이러한 비선형시스템에서의 미소한 초기치의 변화가 가져오는 큰 출력의 변화를 연구하는 내용도 포함한다.

생활에서 접할 수 있는 비선형시스템의 일례로는, 자동차의 속력이 낮을 때는 공기저항이 큰 작용을 하지 못하지만, 속력이 200km/h 이상이 되면 대부분의 엔진 출력이 공기저항으로 소비되는 것 등이 좋은 예가 될 것이다. 이렇게 비선형시스템에서는 동작점이 해당 입력에 대한 출력에 매우 많은 영향을 미치므로 현재 상태의 동작점과 초기값 둘 다 매우 중요하게 다루어야 한다. 선형시스템에서는 동작점과 초기값이 시스템의 출력에 미치는 영향이 작으므로, 많은 경우에 동작점을 따로 계산하거나, 초기값을 0으로 가정하여 해석하는 경우가 많다.

선형시스템의 또 하나의 특징은 그 방정식을 행렬matrix연산의 형식으로 표현하기 쉽다는 것이다. 예를 들어 다음과 같은 간단한 1차 연립방정식을 생각해보자.

$$3x+2y=7 \qquad (1.1.1)$$
$$4x-5y=10 \qquad (1.1.2)$$

두 개의 선형방정식은 다음과 같은 행렬식으로 변환가능하다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad (1.1.3)$$

식(1.1.3)과 같이 표기하면 단순하게 역행렬inverse Matrix을 구하여 연산과정을 간단하게 줄이고 수치결과를 얻어내는 것이 쉬워지므로, 상태공간state space등에서의 해석 등에서도 이러한 행렬 방정식의 형태를 많이 사용한다. 따라서 선형

시스템에서는 항수가 매우 많은 다원 연립방정식도 행렬연산을 사용하여 풀이 소프트웨어를 단순화 시킬 수 있으며, 크래머의 법칙Cramer's rule이나 오일러 소거법Euler elimination과 같은 다양한 풀이 도구Tool를 활용할 수 있다. 대표적인 비선형 방정식인 $y=\cos\theta$ 와 같은 방정식은 선형화 하지 않으면 행렬식으로 표기하는 것이 어려우며(cos과 θ를 별도 행렬로 분리할 수 없음) 선형화 방법으로는 일반적으로 테일러 시리즈Taylor series등을 사용하여 동작점operation point에서 선형화하는 방법이 가장 많이 사용된다.

우리 주변에서 볼 수 있는 실제적인 시스템은 엄밀히 말하면 거의 대부분이 비선형시스템이며, 대부분의 비선형시스템은 수학적인 해를 구하는 것이 매우 힘들다. 하지만 많은 경우에 어떠한 조건을 달아서 이를 선형시스템으로 근사화할 수 있으며, 다행이도 이러한 선형화된 시스템도 대부분 엔지니어에게 의미 있는 결과를 제공하기 때문에, 선형시스템의 해석과 설계툴design tool은 엔지니어에게 있어서 매우 중요하다. 이어지는 챕터chapter에서 언급할 라플라스 변환Laplace transform이나, 보드 선도Bode Plot등도 다 선형시스템에서 사용가능한 대표적인 설계 및 해석 도구이다. 나중에 설명될 푸리에 급수Fourier series나 주파수 응답Frequency response등의 개념도 모두 중첩의 원리를 사용한다.

실제로 우리 주변에서 볼 수 있는 대부분의 시스템은 엄밀하게는 비선형시스템이다. 일례로 우리가 흔히 사용하는 소형(0.25 Watt) 1kΩ 저항 소자를 생각해보자. 이론적으로는 오옴의 법칙(V=IR)에 의하여, 저항의 양단에 1V를 걸면 1mA가 흐르고, 1000V를 걸면 1000mA가 흘러야 정상이지만 1000V와 같은 고전압을 걸었을 경우에는 전류의 양이 증가함에 따라 물질의 특성이 변화하여 실제로 1000mA가 흐르지 않고 파괴되거나 오차가 발생하게 된다. 따라서 엄밀하게 이야기하면 해당저항의 값이 상수 1kΩ이 아닌 전류에 의한 함수 $R=f(A)$로 구성되어야하나, 일반적으로 사용하는 영역 혹은 정해진 영역에서는 거의 선형적인 특성을 보이므로, 정해진 일률Watt의 해당 용량 이내에서는 큰 무리 없이 선형 소자로서 사용이 가능하다. 대학의 학부과정의 제어공학에서는 거의 대부분이 선형시스템을 전제로 하며, 본서에서도 선형시스템을 염두에 두어 설명을 진행할 것이다.